

2021年汕头市普通高考第一次模拟考试

数学试题参考答案及评分标准

评分说明:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考, 如果考生的解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则.

2. 对计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定后继部分的给分, 但不得超过该部分正确解答应得分数的一半; 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分.

3. 解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

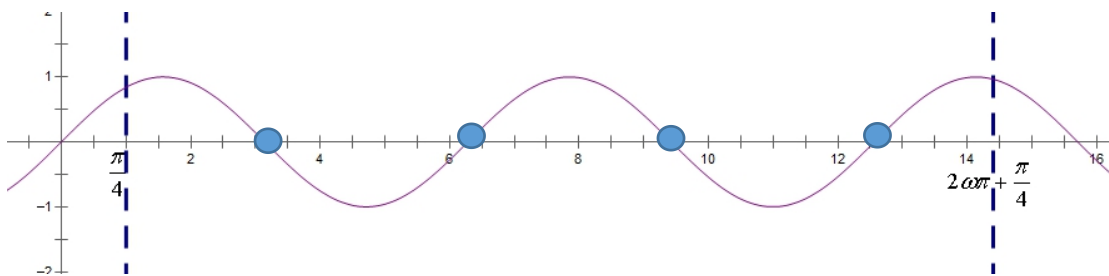
一、单项选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	C	B	D	A	A	A	C

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

题号	9	10	11	12
答案	AC	AB	ACD	BD

第 11 题: 若 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 4 个零点, 则由 $x \in [0, 2\pi]$ 得: $\left[\frac{\pi}{4}, 2\omega\pi + \frac{\pi}{4}\right]$



令 $t = \omega x + \frac{\pi}{4}$, $y = \sin t$ 图象如上图所示

(1) $\therefore 4\pi \leq 2\omega\pi + \frac{\pi}{4} < 5\pi$ 解得: $\frac{15}{8} \leq \omega < \frac{19}{8}$ 故: C 正确

(2) 由图容易得到: $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 2 个极小值点, 故: A 正确

(3) $\because x \in \left(0, \frac{2\pi}{15}\right) \therefore \omega x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{15}\omega + \frac{\pi}{4}\right)$

由 (1) 知: $\frac{15}{8} \leq \omega < \frac{19}{8} \therefore \frac{\pi}{2} \leq \frac{2\pi}{15}\omega + \frac{\pi}{4} < \frac{19\pi}{60} + \frac{\pi}{4}$, 故 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{2\pi}{15}\right)$ 不单调, 故 B 错

(4) 对于 D 选项, $\because y = f(x)$ 图象关于 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称

$$\therefore \frac{\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\therefore \omega = 1 + 4k$$

又 $\because f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36}\right)$ 单调

$$\therefore \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} \geq \frac{5\pi}{36} - \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{12}$$

$\therefore \omega \leq 12 \therefore \omega$ 的最大值为 9, 故 D 正确

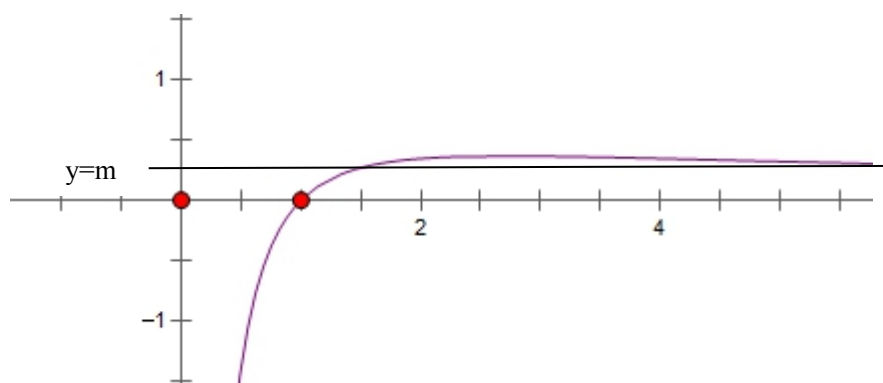
第 12 题: 由 $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$ 得: $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

令 $f'(x) = 0$ 得, $x = e$

当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 变化如下表:

x	$(0, e)$	e	$(e, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	—
$f(x)$	单调递增	极大值 $\frac{1}{e}$	单调递减

故, $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$ 如图所示:



$$A. f(2) = \frac{\ln 2}{2} = \ln 2^{\frac{1}{2}}, f(3) = \ln 3^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 > \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 \quad \therefore 3^{\frac{1}{3}} > 2^{\frac{1}{2}} \therefore f(3) > f(2), \text{ 故 A 错}$$

$$B. \because \sqrt{e} < \sqrt{\pi} < e, \text{ 且 } f(x) \text{ 在 } (0, e) \text{ 单调递增}$$

$$\therefore f(\sqrt{e}) < f(\sqrt{\pi}), \frac{\ln \sqrt{e}}{e} < \frac{\ln \sqrt{\pi}}{\pi} \quad \therefore \frac{\ln e}{\sqrt{e}} < \frac{\ln \pi}{\sqrt{\pi}} \quad \therefore \ln \pi > \sqrt{\frac{\pi}{e}}, \text{ 故: B 正确}$$

$$C. \because f(x) = m \text{ 有两个不相等的零点 } x_1, x_2 \quad \therefore f(x_1) = f(x_2) = m$$

$$\text{不妨设 } 0 < x_1 < e < x_2$$

$$\text{要证: } x_1 x_2 < e^2, \text{ 即要证: } x_1 < \frac{e^2}{x_2} \quad \because x_2 > e, \therefore \frac{e^2}{x_2} < e \quad \because f(x) \text{ 在 } (0, e) \text{ 单调递增, } \therefore \text{只需}$$

$$\text{证: } f(x_1) < f\left(\frac{e^2}{x_2}\right) \quad \text{即: } f(x_2) < f\left(\frac{e^2}{x_2}\right) \quad \text{只需证: } f(x_2) - f\left(\frac{e^2}{x_2}\right) < 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{令 } g(x) = f(x) - f\left(\frac{e^2}{x}\right), (x > e), \text{ 则 } g'(x) = (\ln x - 1)\left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\text{当 } x > e \text{ 时, } \ln x > 1, \frac{1}{e^2} > \frac{1}{x^2} \quad \therefore g'(x) > 0 \quad \therefore g(x) \text{ 在 } (e, +\infty) \text{ 单调递增}$$

$$\because x_2 > e \quad \therefore g(x_2) > g(e) = 0, \text{ 即: } f(x_2) - f\left(\frac{e^2}{x_2}\right) > 0 \text{ 这与 } \textcircled{1} \text{ 矛盾, 故 C 错}$$

$$D. \text{ 设 } 2^x = 5^y = k, \text{ 且 } x, y \text{ 均为正数, 则 } x = \log_2 k = \frac{\ln k}{\ln 2}, y = \log_5 k = \frac{\ln k}{\ln 5}$$

$$\therefore 2x = \frac{2}{\ln 2} \ln k, 5y = \frac{5}{\ln 5} \ln k$$

$$\because \frac{\ln 2}{2} = \ln 2^{\frac{1}{2}}, \frac{\ln 5}{5} = \ln 5^{\frac{1}{5}} \text{ 且 } 2^{\frac{1}{2}} > 5^{\frac{1}{5}} \left(\because \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10} > \left(5^{\frac{1}{5}}\right)^{10} \right)$$

$$\therefore \frac{\ln 2}{2} > \frac{\ln 5}{5} > 0 \quad \therefore \frac{2}{\ln 2} < \frac{5}{\ln 5} \quad \therefore 2x < 5y, \text{ 故 D 正确}$$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 7

14. 22.8, 38 (14 题第一空 2 分, 第二空 3 分)

15. 多个答案(符合要求就可以)

$$\text{如: } y^2 - \frac{x^2}{2} = 1 \quad \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1 \quad \frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{6} = 1$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{2a^2} = 1, \quad \frac{y^2}{m} - \frac{x^2}{2m} = 1 (m > 0)$$

16. $\frac{52}{9}\pi$

【解法 1】设 $|OH| = d$, SH 为 $Rt\triangle ABS$ 的外接圆半径,

由图得, $|OH|^2 + |SH|^2 = |OS|^2$

设外接球半径为 R , 则

$$d^2 + 1 = R^2 \quad (1)$$

又因为二面角 $S - AB - C$ 的大小为 60° , 则 $\angle CHS = 60^\circ$

$$\therefore \angle CHO = 30^\circ, \text{ 在 } \triangle CHO \text{ 中, } d^2 + CH^2 - 2d \cdot CH \cos 30^\circ = R^2, \quad (2)$$

CH 为等边 $\triangle ABC$ 的高, 则 $CH = \sqrt{3}$

由 (1) (2) 得, $d = \frac{2}{3}$, $R^2 = d^2 + 1 = \frac{13}{9}$, $S = 4\pi R^2 = \frac{52\pi}{9}$

【解法 2】

设 H, E 分别为 $Rt\triangle ABS$ 和等边 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心, 分别过 H, E 作各自平面的垂线相交于点 O, O 为球心

又因为二面角 $S - AB - C$ 的大小为 60° , 则 $\angle CHS = 60^\circ$

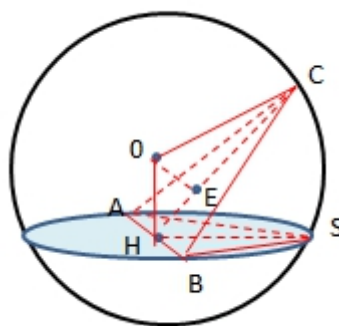
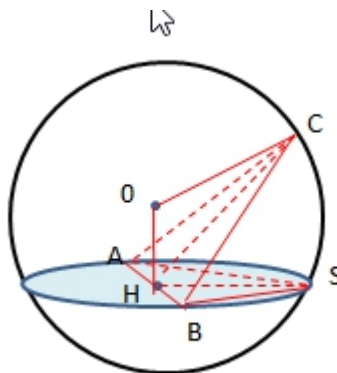
$$\therefore \angle CHO = 30^\circ, CH \text{ 为等边 } \triangle ABC \text{ 的高, 则 } CH = \sqrt{3}$$

$$CE = \frac{2}{3}CH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$EH = \frac{1}{3}CH = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

因为 $\angle CHO = 30^\circ$, 所以 $EO = \frac{1}{3}$

在 $Rt\triangle OEC$ 中, $R^2 = EO^2 + CE^2 = \frac{13}{9}$, $S = 4\pi R^2 = \frac{52\pi}{9}$



四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

解: (1) 选条件①,

方法一: 由 $S_n = \frac{3^n}{2} + m$ 得

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = \frac{3^{n-1}}{2} + m$ 1 分

$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3^n}{2} - \frac{3^{n-1}}{2} = 3^{n-1}$ 2 分

又当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{3}{2} + m$, 因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列,3 分

所以 $\frac{3}{2} + m = 1$, 即 $m = -\frac{1}{2}$ 4 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3^{n-1}$, $n \in N^*$ 5 分

方法二:

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{3}{2} + m$ 1 分

当 $n=2$ 时, $a_2 = S_2 - S_1 = (\frac{3^2}{2} + m) - (\frac{3^1}{2} + m) = 3$

当 $n=3$ 时, $a_3 = S_3 - S_2 = (\frac{3^3}{2} + m) - (\frac{3^2}{2} + m) = 9$ 2 分

$q = \frac{a_3}{a_2} = 3, a_1 = 1$ 3 分

所以 $a_1 = \frac{3}{2} + m = 1, \therefore m = -\frac{1}{2}$ 4 分

所以 $a_n = 3^{n-1}$ 5 分

选条件②,

方法一:

由 $S_n = \frac{1}{2}a_{n+1} + m$, 得

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = \frac{1}{2}a_n + m$ 1 分

两式相减得 $a_n = \frac{1}{2}a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n$, 即 $a_{n+1} = 3a_n$ 2 分

因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1 = 1$ 3 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3^{n-1}$, $n \in N^*$ 4 分

又当 $n=1$ 时, $a_1 = \frac{1}{2}a_2 + m$, 即 $m = -\frac{1}{2}$ 5 分

方法二:

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}a_2 + m$ 1 分

当 $n=2$ 时, $a_2 = S_2 - S_1 = (\frac{1}{2}a_3 + m) - (\frac{1}{2}a_2 + m), \therefore a_3 = 3a_2$ 2 分

所以 $q = \frac{a_3}{a_2} = 3, a_1 = 1$ 3 分

所以 $a_1 = \frac{3}{2} + m = 1, \therefore m = -\frac{1}{2}$ 4 分

所以 $a_n = 3^{n-1}$ 5 分

(2) 由 (1) 可知, $a_n = 3^{n-1}$, 即 $b_n = \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)} = \frac{3^{n-1}}{(3^{n-1} + 1)(3^n + 1)}$ 6 分

$b_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^{n-1} + 1} - \frac{1}{3^n + 1} \right)$ 7 分

则

$T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1} + 1} - \frac{1}{3^n + 1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n + 1} \right) = \frac{3^n}{2(3^n + 1)}$ 10 分

18. (本小题满分 12 分)

解法一: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $b = \sqrt{5}, c = \sqrt{2}, \angle B = 45^\circ$

由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$,1 分

得 $5 = 2 + a^2 - 2 \times \sqrt{2} \times a \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

解得 $a = 3$ 或 $a = -1$ (舍)2 分

所以 $BC = 3$3 分

三角形 ABC 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}$ 5 分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

得 $\frac{\sqrt{5}}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin C}$, 解得 $\sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}$,6 分

在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $b = \sqrt{5} > c = \sqrt{2}$, 所以 $\angle C$ 为锐角.7 分

故 $\cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 8 分

因为 $\cos \angle ADB = \frac{4}{5}$, ($\angle ADB$ 为锐角)

$$\text{所以 } \sin \angle ADB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ADB} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\sin \angle DAC = \sin(\angle ADB - \angle C),$$

$$= \sin \angle ADB \cdot \cos \angle C - \cos \angle ADB \cdot \sin \angle C = \frac{3}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{25} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{因为由图可知 } \angle DAC \text{ 为锐角, 则 } \cos \angle DAC = \sqrt{1 - \sin^2 \angle DAC} = \frac{11\sqrt{5}}{25} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \tan \angle DAC = \frac{\sin \angle DAC}{\cos \angle DAC} = \frac{2}{11} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

解法二: (1) 同解法一

$$(2) \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中, 由正弦定理 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\text{得 } \frac{\sqrt{5}}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin C}, \text{ 解得 } \sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $b = \sqrt{5} > c = \sqrt{2}$, 所以 $\angle C$ 为锐角. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

$$\text{故 } \tan C = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

因为 $\cos \angle ADB = \frac{4}{5}$, ($\angle ADB$ 为锐角)

$$\text{所以 } \tan \angle ADB = \frac{3}{4} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\because \angle ADB + \angle ADC = \pi, \therefore \tan \angle ADC = -\frac{3}{4} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{故 } \tan \angle DAC = \tan(\pi - (\angle ADC + \angle C))$$

$$= -\tan(\angle ADC + \angle C) = -\frac{\tan(\angle ADC) + \tan(\angle C)}{1 - \tan(\angle ADC) \cdot \tan(\angle C)} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$= -\frac{\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{11} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \tan \angle DAC = \frac{\sin \angle DAC}{\cos \angle DAC} = \frac{2}{11}$$

解法三: (1) 过点 A 作出高交 BD 于 F

$$\therefore \triangle ABF \text{ 为等腰直角三角形, } \because AB = \sqrt{2}, \therefore AF = BF = 1, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

同理 $\triangle AFC$ 为直角三角形, $\therefore AF = 1, AC = \sqrt{5} \therefore FC = 2$ 2 分

故 $BC = BF + FC = 3$ 3 分

三角形 ABC 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |BC| \cdot |AF| = \frac{3}{2}$ 5 分

(2) $\triangle AFD$ 为直角三角形, 且 $|AF| = 1, \cos \angle ADB = \frac{4}{5}$

所以 $\sin \angle ADB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ADB} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$ 7 分

$\therefore AD = \frac{AF}{\sin \angle ADB} = \frac{5}{3}, DF = AD \cdot \cos \angle ADB = \frac{4}{3}, CD = \frac{2}{3}, \sin \angle ADC = \frac{3}{5}$ 9 分

在 $\triangle ADC$ 中由正弦定理得,

$\frac{CD}{\sin \angle DAC} = \frac{AC}{\sin \angle ADC},$ 故 $\sin \angle DAC = \frac{2\sqrt{5}}{25}$ 10 分

因为由图可知 $\angle DAC$ 为锐角, 则 $\cos \angle DAC = \sqrt{1 - \sin^2 \angle DAC} = \frac{11\sqrt{5}}{25}$ 11 分

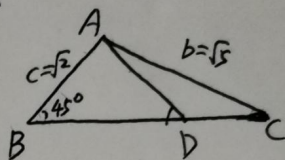
所以 $\tan \angle DAC = \frac{\sin \angle DAC}{\cos \angle DAC} = \frac{2}{11}$ 12 分

18. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c

已知: $b = \sqrt{5}, c = \sqrt{2}, \angle B = 45^\circ$

(1) 求边 BC 的长和 $\triangle ABC$ 面积

(2) 在 BC 上取点 D , 使得 $\cos \angle ADB = \frac{4}{5}$,
求 $\tan \angle DAC$ 的值.



解法四:

(1) 同解法一. ----- 5分

(2) 由 $\cos \angle ADB = \frac{4}{5}$ 可知 $\angle ADB$ 为锐角

$$\therefore \tan \angle ADB = \frac{\sin \angle ADB}{\cos \angle ADB} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \angle ADB}}{\cos \angle ADB} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \text{ --- 7分}$$

又由(1)知 $a = 3$

$$\therefore \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ba} = \frac{5 + 9 - 2}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot 3} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ --- 9分}$$

可知 C 为锐角

$$\therefore \tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 C}}{\cos C} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2} \text{ --- 10分}$$

$$\therefore \tan \angle DAC = \tan(\angle ADB - C) = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{11}{8}} = \frac{2}{11} \text{ --- 12分}$$

NOVA 5 Pro
AIQUAD CAMERA

19. (本小题满分 12 分)

解: (1) 证明: 连结 BO_1 ,

在圆柱中 OO_1 中,

$\therefore EF \perp CD, EF \perp BC, \dots\dots\dots 2$ 分

且 $CD \cap BC = C$,

$CD, BC \subset$ 平面 $ABCD$,

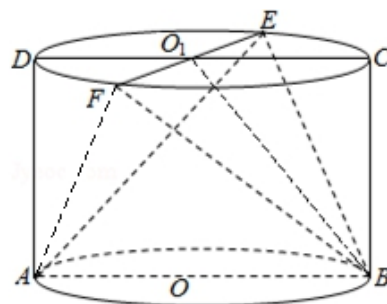
$\therefore EF \perp$ 平面 $ABCD, \dots\dots\dots 4$ 分 (少条件扣一分)

又 $BO_1 \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore EF \perp BO_1, \dots\dots\dots 5$ 分

$\therefore$ 在 $\triangle BEF$ 中, O_1 为 EF 中点

$\therefore BE = BF \dots\dots\dots 6$ 分



2) 法一: (向量法)

解: 分别以 EF 在 $\odot O$ 所在平面内的投影、 AB 、 OO_1 为坐标轴建立空间直角坐标系 (如图示),

则 $A(0, -1, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $E(-1, 0, a)$, $F(1, 0, a)$... (7 分)

$$\overrightarrow{AE} = (-1, 1, a), \quad \overrightarrow{BE} = (-1, -1, a), \quad \overrightarrow{BF} = (1, -1, a)$$

设平面 BEF 的法向量分别是 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$

则由 $\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ 及 $\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{BF} = 0$,

$$\text{得} \begin{cases} -x_1 - y_1 + az_1 = 0 \\ x_1 - y_1 + az_1 = 0 \end{cases}, \text{取 } z_1 = 1, \text{得 } \vec{n}_1 = (0, a, 1) \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设直线 AE 与平面 BEF 所成角为 θ ,

$$\text{由 } \sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{AE}, \vec{n}_1 \rangle \right| = \frac{|a + a|}{\sqrt{a^2 + 2} \sqrt{a^2 + 1}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

化简得: $(a^2 - 2)(a^2 - 1) = 0$ 解得 $a = \sqrt{2}$, ($a > 1$) (9 分)

设平面 ABE 的法向量分别是 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$

则由 $\vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ 及 $\vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{AE} = 0$,

$$\text{得} \begin{cases} 2y_2 = 0 \\ -x_2 + y_2 + \sqrt{2}z_2 = 0 \end{cases}, \text{取 } z_2 = 1, \text{得 } \vec{n}_2 = (\sqrt{2}, 0, 1) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

设二面角 $A-BE-F$ 的平面角为 θ ,

$$\text{则 } |\cos \theta| = \left| \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle \right| = \frac{1}{3},$$

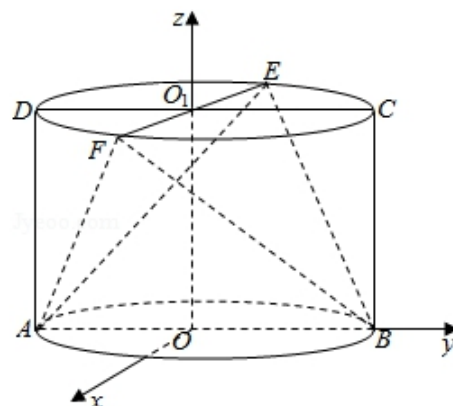
由图像可知, θ 为锐角,

$\therefore$ 所求二面角 $A-BE-F$ 的平面角的余弦值为 $\frac{1}{3}$ 12 分

2) 法二: (传统法)

连 AO_1 , 面 $BEF \perp$ 面 $ABCD$, 过 A 作 $AH \perp BO_1$

$AH \perp$ 面 BEF , 连 EH , 则 $\angle AEH$ 为 AE 与面 BEF 的所成角。..... (7 分)



在 $\triangle ABO_1$, $AO_1 = BO_1 = \sqrt{a^2 + 1}$, 由等积法
 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 1} \cdot AH$, $AH = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 1}}$ (8分)

$$\sin \angle AEH = \frac{AH}{AE} = \frac{2a}{\sqrt{(a^2 + 1) \cdot (a^2 + 2)}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

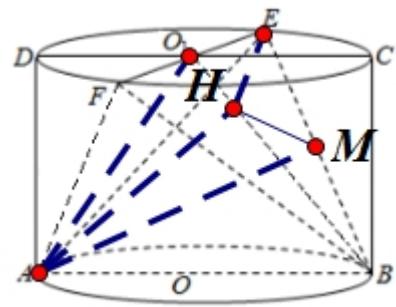
化简 $(a^2 - 2) \cdot (a^2 - 1) = 0$, $\therefore a > 1 \therefore a = \sqrt{2}$ (9分)

$\therefore AB = BE = AE = 2$, 取 BE 的中点 M , 连 AM , HM ,
 则 $AM \perp BE$, $HM \perp BE$,
 $\therefore \angle AMH$ 为二面角 $A - BE - F$ 的平面角。 (10分)

$$AM = \sqrt{3}, HM = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{3 - \frac{8}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (11分)}$$

$$\therefore \cos \angle HMA = \frac{HM}{AM} = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ 二面角 $A - BE - F$ 平面角的余弦值为 $\frac{1}{3}$ (12分)



20. (本小题满分 12 分)

解: (1) 根据所提供的数据, 可得 2×2 列联表:

	合格品	次品	合计
甲	80	20	100
乙	95	5	100
合计	175	25	200

.....2 分

设 H_0 : 产品的合格率与技术升级无关.

$$\text{由 } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)},$$

$$\text{可得 } K^2 = \frac{200 \times (80 \times 5 - 95 \times 20)^2}{175 \times 25 \times 100 \times 100} = \frac{72}{7} \approx 10.3 > 7.879. \text{4 分}$$

$$\therefore P(K^2 \geq k_0) = 0.005$$

故有 99.5% 的把握认为产品的合格率与技术升级有关.5 分

(2) 解法一: 甲生产线抽检的产品中有 35 件 A 等级, 45 件 B 等级, 20 件 C 等级, ...6 分

对于甲生产线, 单件产品利润 X 的取值可能为 $m - 20$, 20 , -20 ,7 分

X 的分布列如下:

X	$m-20$	20	-20
P	$\frac{7}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{5}$

则 $E(X) = (m-20) \times \frac{7}{20} + 20 \times \frac{9}{20} - 20 \times \frac{1}{5} = \frac{7}{20}m - 2$,8 分

乙生产线抽检的产品中有 65 件 A 等级, 30 件 B 等级, 5 件 C 等级;9 分

对于乙生产线, 单位产品利润 Y 的取值可能为 $m-20$, 20, -20,10 分

Y 的分布列如下:

Y	$m-20$	20	-20
P	$\frac{13}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$

则 $E(Y) = (m-20) \times \frac{13}{20} + 20 \times \frac{3}{10} - 20 \times \frac{1}{20} = \frac{13}{20}m - 8$,11 分

依题意. $E(Y) - E(X) = \frac{13}{20}m - 8 - \left(\frac{7}{20}m - 2 \right) = \frac{6m}{20} - 6 = 12$,

$\therefore m = 60$, 所以, A 等级产品的出产单价为 60 元.12 分

(2) 解法二: 甲生产线抽检的产品中有 35 件 A 等级, 45 件 B 等级, 20 件 C 等级,6 分

乙生产线抽检的产品中有 65 件 A 等级, 30 件 B 等级, 5 件 C 等级;7 分

因为用样本的频率估计概率

所以对于甲生产线, 单件产品的利润 $\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{35 \times m + 45 \times 40 - 100 \times 20}{100} = \frac{7}{20}m - 2$
.....9 分

对于乙生产线, 单件产品的利润 $\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{65 \times m + 30 \times 40 - 100 \times 20}{100} = \frac{13}{20}m - 8$
.....11 分

依题意. $\bar{x}_{\text{乙}} - \bar{x}_{\text{甲}} = \frac{13}{20}m - 8 - \left(\frac{7}{20}m - 2 \right) = \frac{6m}{20} - 6 = 12$,

$\therefore m = 60$, 所以, A 等级产品的出产单价为 60 元.12 分

21. (本小题满分 12 分)

解: (1) $f'(x) = \frac{x-1}{x} (x > 0)$ 1 分

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;2 分

由 $f(x) < 0$ 得, $a > 1$ 3 分

当 $a > 1$ 时, $f(e^{-a}) > 0$, $f(1) < 0$, $f(e^a) = e^a - 2a > 0$,

所以 $\exists x_1 \in (e^{-a}, 1)$ 使得 $f(x_1) = 0$, $\exists x_2 \in (1, e^a)$ 使得 $f(x_2) = 0$,

综上: $a \in (1, +\infty)$ 5 分

(2) 由(1)可知, $0 < x_1 < 1 < x_2$,

要证 $x_1 + x_2 < \frac{4a+2}{3}$

即证 $x_2 < \frac{4a+2}{3} - x_1 = \frac{4(x_1 - \ln x_1) + 2}{3} - x_1 = \frac{x_1 - 4 \ln x_1 + 2}{3}$

.....6 分

构造函数 $g(x) = \frac{x - 4 \ln x + 2}{3}$, ($0 < x < 1$), 则 $g'(x) = \frac{x-4}{3x} < 0$

所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, $g(x) > g(1) = 1$.

故有 $x_2 > 1$, $\frac{x_1 - 4 \ln x_1 + 2}{3} > 1$ 7 分

因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以只需证 $f(x_2) < f(\frac{x_1 - 4 \ln x_1 + 2}{3})$

即证 $f(x_1) < f(\frac{x_1 - 4 \ln x_1 + 2}{3})$

构造函数 $h(x) = f(x) - f(\frac{x - 4 \ln x + 2}{3})$, ($0 < x < 1$),

$h'(x) = \frac{2x+1}{3x} + \frac{1}{x-4 \ln x + 2} \cdot \frac{x-4}{x}$ 9 分

下面证 $h'(x) > 0$ 在 $x \in (0, 1)$ 时恒成立

即证 $\ln x - \frac{(x+5)(x-1)}{4x+2} < 0$

构造函数 $\varphi(x) = \ln x - \frac{(x+5)(x-1)}{4x+2}$, ($0 < x < 1$)

$$\varphi'(x) = \frac{(1-x)^3}{(2x+1)^2 x} > 0 \text{ 在 } x \in (0,1) \text{ 时恒成立} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

因此 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 从而 $\varphi(x) < \varphi(1) = 0$,

$\therefore h'(x) > 0$ 在 $x \in (0,1)$ 时恒成立

$\therefore h(x)$ 在 $x \in (0,1)$ 时单调递增

$\therefore h(x) < h(1) = 0$ 成立, 即 $f(x_1) < f(\frac{x_1 - 4 \ln x_1 + 2}{3})$

$\therefore x_1 + x_2 < \frac{4a+2}{3}$ 成立 $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. (本小题满分 12 分)

解: (1) 方法一:

在 x 轴负半轴上取点 Q , 使得 Q 、 M 关于原点对称, 连接 PQ ,

$$\therefore |PQ| + |PM| = 4 > |QM| \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

所以动点 P 的轨迹是以 Q 、 M 为焦点的椭圆 (左右顶点除外)

$$\therefore M(\sqrt{3}, 0), Q(-\sqrt{3}, 0)$$

$$\therefore 2a = 4, c = \sqrt{3}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{故 } b^2 = a^2 - c^2 = 1$$

$$\therefore \text{动点 } P \text{ 的轨迹方程是: } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \text{ (} y \neq 0 \text{)} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

方法二: 设点 $P(x, y)$

$$\text{依题意 } |\overrightarrow{MP}| + |\overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}| + |\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OM}| = 4,$$

$$\therefore \sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + y^2} + \sqrt{(x+\sqrt{3})^2 + y^2} = 4 > 2\sqrt{3}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

所以动点 P 的轨迹为椭圆 (左右顶点除外)

$$\therefore 2a = 4, c = \sqrt{3}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{故 } b^2 = a^2 - c^2 = 1$$

∴ 动点 P 的轨迹方程是: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ($y \neq 0$)4 分

(2) ①

1° 当 l_1 垂直于 x 轴时, AB 的中点 $E(\sqrt{3}, 0)$, 直线 l_2 为 x 轴, 显然与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ($y \neq 0$) 无交点, 故不合题意.5 分

2° 当 l_1 不垂直于 x 轴时, 不妨设直线 l_1 的方程为 $y = k(x - \sqrt{3})$, ($k \neq 0$), $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$\text{由} \begin{cases} y = k(x - \sqrt{3}) \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \text{得, } (4k^2 + 1)x^2 - 8\sqrt{3}k^2x + 12k^2 - 4 = 0$$

容易知道: $\Delta > 0$

$$\text{由韦达定理得: } x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{3}k^2}{4k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{12k^2 - 4}{4k^2 + 1} \text{6 分}$$

$$\therefore y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) - 2\sqrt{3}k = \frac{8\sqrt{3}k^3}{4k^2 + 1} - 2\sqrt{3}k = \frac{-2\sqrt{3}k}{4k^2 + 1}$$

$$\therefore E\left(\frac{4\sqrt{3}k^2}{4k^2 + 1}, \frac{-\sqrt{3}k}{4k^2 + 1}\right), \because l_1 \perp l_2 \therefore \text{以 } -\frac{1}{k} \text{ 代替 } k \text{ 得, } F\left(\frac{4\sqrt{3}}{k^2 + 4}, \frac{\sqrt{3}k}{k^2 + 4}\right)$$

$$\therefore \text{直线 } EF \text{ 的斜率为: } k_{EF} = \frac{\frac{\sqrt{3}k}{k^2 + 4} + \frac{\sqrt{3}k}{4k^2 + 1}}{\frac{4\sqrt{3}}{k^2 + 4} - \frac{4\sqrt{3}k^2}{4k^2 + 1}} = \frac{5k}{4(1 - k^2)}, (k \neq \pm 1) \text{7 分}$$

$$\therefore \text{直线 } EF \text{ 的方程为: } y + \frac{\sqrt{3}k}{4k^2 + 1} = \frac{5k}{4(1 - k^2)}\left(x - \frac{4\sqrt{3}k^2}{4k^2 + 1}\right), (k \neq \pm 1)$$

$$\text{由椭圆的对称性可知, 若存在这样的定点必在 } x \text{ 轴上. 令 } y = 0, \text{ 则 } \frac{\sqrt{3}k}{4k^2 + 1} = \frac{5k}{4(1 - k^2)}\left(x - \frac{4\sqrt{3}k^2}{4k^2 + 1}\right)$$

$$\therefore x = \frac{16\sqrt{3}k^2 + 4\sqrt{3}}{5(4k^2 + 1)} = \frac{4\sqrt{3}(4k^2 + 1)}{5(4k^2 + 1)} = \frac{4\sqrt{3}}{5}$$

$$\therefore \text{直线 } EF \text{ 恒过定点 } \left(\frac{4\sqrt{3}}{5}, 0\right) \text{8 分}$$

$$\text{当 } k = \pm 1 \text{ 时, } E\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}, \frac{-\sqrt{3}}{5}\right), F\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}, \frac{\sqrt{3}}{5}\right), \text{ 显然直线 } EF \text{ 恒过定点 } \left(\frac{4\sqrt{3}}{5}, 0\right)$$

综上所述：直线 EF 恒过定点 $\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}, 0\right)$ 9 分

法二：直线 EF 的方程为： $y - \frac{\sqrt{3}k}{k^2 + 4} = \frac{5k}{4(1 - k^2)} \left(x - \frac{4\sqrt{3}}{k^2 + 4}\right)$, $k \neq \pm 1$

$$\begin{aligned} \therefore y &= \frac{5k}{4(1 - k^2)} \left(x - \frac{4\sqrt{3}}{k^2 + 4}\right) + \frac{\sqrt{3}k}{k^2 + 4} \\ &= \frac{5k}{4(1 - k^2)} \left[x - \frac{4\sqrt{3}}{k^2 + 4} + \frac{4(1 - k^2)}{5k} \cdot \frac{\sqrt{3}k}{k^2 + 4}\right] \\ &= \frac{5k}{4(1 - k^2)} \left[x - \frac{20\sqrt{3} - 4\sqrt{3}(1 - k^2)}{5(k^2 + 4)}\right] \\ &= \frac{5k}{4(1 - k^2)} \left[x - \frac{16\sqrt{3} + 4\sqrt{3}k^2}{5(k^2 + 4)}\right] \\ &= \frac{5k}{4(1 - k^2)} \left(x - \frac{4\sqrt{3}}{5}\right) \end{aligned}$$

$\therefore$ 直线 EF 恒过定点 $\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}, 0\right)$ 8 分

当 $k = \pm 1$ 时, $E\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}, \frac{-\sqrt{3}}{5}\right), F\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}, \frac{\sqrt{3}}{5}\right)$, 显然直线 EF 恒过定点 $\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}, 0\right)$

综上所述：直线 EF 恒过定点 $\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}, 0\right)$ 9 分

② 由①知: $x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{3}k^2}{4k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{12k^2 - 4}{4k^2 + 1}$

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \sqrt{1 + k^2} \sqrt{\frac{192k^4}{(4k^2 + 1)^2} - 4 \cdot \frac{12k^2 - 4}{4k^2 + 1}} \quad \text{.....10 分} \\ &= \frac{4(k^2 + 1)}{4k^2 + 1} \end{aligned}$$

同理可得: $|CD| = \frac{4(k^2 + 1)}{k^2 + 4}$

$$\therefore \text{四边形 } ACBD \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} |AB| |CD| = \frac{8(k^2+1)}{(4k^2+1)(k^2+4)} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

令 $t = k^2 + 1$, 则 $t > 1$

$$\therefore S = \frac{8t^2}{(4t-3)(t+3)} = \frac{8t^2}{4t^2+9t-9} = \frac{8}{-\frac{9}{t^2} + \frac{9}{t} + 4} = \frac{8}{-\left(\frac{3}{t}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{t} + 4}$$

$$\because t > 1 \therefore 0 < \frac{3}{t} < 3 \therefore \text{当 } \frac{3}{t} = \frac{3}{2}, \text{ 即 } k = \pm 1 \text{ 时, } -\left(\frac{3}{t}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{t} + 4 \leq \frac{25}{4} \therefore S_{\min} = \frac{32}{25}$$

故: 四边形 $ACBD$ 面积最小值为 $\frac{32}{25}$ 12 分

方法三

(2) 设直线 l_1 的方程为: $x - \sqrt{3} = my$, 由题意 $m \neq 0$, 则直线 l_2 的方程为: $x - \sqrt{3} = -\frac{1}{m}y$,

直线 l_1 、 l_2 均过椭圆的焦点 (椭圆内一点), l_1 、 l_2 与椭圆必有交点。设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$\text{由 } \begin{cases} x - \sqrt{3} = my \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow (m^2 + 4)y^2 + 2\sqrt{3}my - 1 = 0, \Delta > 0,$$

$$y_1 + y_2 = \frac{-2\sqrt{3}m}{m^2 + 4}, x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{3}}{m^2 + 4} \quad 6 \text{ 分}$$

$$\therefore E\left(\frac{4\sqrt{3}}{m^2 + 4}, \frac{-\sqrt{3}m}{m^2 + 4}\right), \text{ 以 } -\frac{1}{m} \text{ 代替 } m \text{ 得: } F\left(\frac{4\sqrt{3}m^2}{4m^2 + 1}, \frac{-\sqrt{3}m}{4m^2 + 1}\right),$$

$$\text{直线 } EF \text{ 的斜率是: } k_{EF} = \frac{5m}{4(m^2 - 1)} (m \neq \pm 1), \quad 7 \text{ 分}$$

$$\text{直线 } EF \text{ 的方程是: } y + \frac{\sqrt{3}m}{m^2 + 4} = \frac{5m}{4(m^2 - 1)} \left(x - \frac{4\sqrt{3}}{m^2 + 4}\right),$$

$$\text{令 } y = 0, x = \frac{4\sqrt{3}m^2 + 16\sqrt{3}}{5(m^2 + 4)} = \frac{4\sqrt{3}}{5}, \text{ 直线 } EF \text{ 恒过定点 } \left(\frac{4\sqrt{3}}{5}, 0\right) \quad 8 \text{ 分},$$

$$\text{当 } m = \pm 1 \text{ 时, 直线 } EF \text{ 恒过定点 } \left(\frac{4\sqrt{3}}{5}, 0\right).$$

$$\text{综上, 直线 } EF \text{ 恒过定点 } \left(\frac{4\sqrt{3}}{5}, 0\right). \quad 9 \text{ 分}$$

(3)

$$|AB| = \frac{4(1+m^2)}{4+m^2}, |CD| = \frac{4(m^2+1)}{4m^2+1}, 10 \text{分}$$

$$S = \frac{1}{2} |AB| |CD| = \frac{8(m^2+1)^2}{(m^2+4)(4m^2+1)} \geq \frac{8(m^2+1)^2}{\left(\frac{m^2+4+4m^2+1}{2}\right)^2} = \frac{32}{25}$$

当且仅当 $m^2 = 1$ 取等号。.....12 分.

第22题求定点的解法.

在求出 $E\left(\frac{4\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}, \frac{\sqrt{3}k}{4k^2+1}\right)$ 和 $F\left(\frac{4\sqrt{3}}{k^2+4}, \frac{\sqrt{3}k}{k^2+4}\right)$ ($k \neq 0$).

由椭圆的对称性可知直线EF必过x轴上
一个定点 $M(x_0, 0)$

$\therefore \overrightarrow{EM}$ 与 $\overrightarrow{MF}$ 共线

$\overrightarrow{EM} = \left(x_0 - \frac{4\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}, \frac{\sqrt{3}k}{4k^2+1}\right)$

$\overrightarrow{MF} = \left(\frac{4\sqrt{3}}{k^2+4} - x_0, \frac{\sqrt{3}k}{k^2+4}\right)$

$\therefore \frac{\sqrt{3}k}{k^2+4} \cdot \left(x_0 - \frac{4\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}\right) = \frac{\sqrt{3}k}{4k^2+1} \cdot \left(\frac{4\sqrt{3}}{k^2+4} - x_0\right)$ ($k \neq 0$)

化简得 $(4k^2+1)x_0 - 4\sqrt{3}k^2 = 4\sqrt{3} - (k^2+4)x_0$

即 $5(k^2+1)x_0 = 4\sqrt{3}(k^2+1)$

$\therefore x_0 = \frac{4\sqrt{3}}{5}$

$\therefore EF$ 过定点 $\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}, 0\right)$

(整个过程 3 分)

NOVA 5 Pro
AI QUAD CAMERA